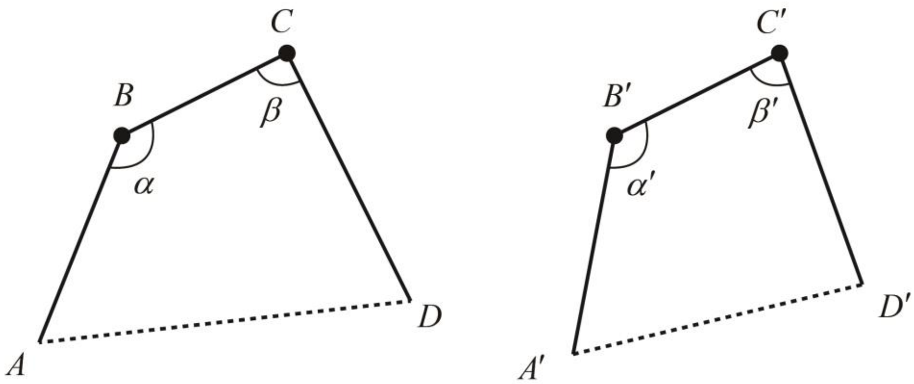
53 柯西的手臂遊戲…張開雙手的數學

每一個人將拳頭握緊，雙手的手臂張開，當張得越開時，兩拳頭間的距離就越大，這是大家都可以親身體驗的常識。這種手臂遊戲可以延伸成一個有趣的數學定理嗎？兩百年前的柯西，就是發現而且證明這數學定理的人，更有趣的是，他的證明是有瑕疵的，或者說，是有漏洞的。這個漏洞直到荀白克給薩林巴的一封信時，柯西的這個錯誤才被發現及填補起來。

為了便於瞭解，我們將手臂遊戲設計成四邊形：

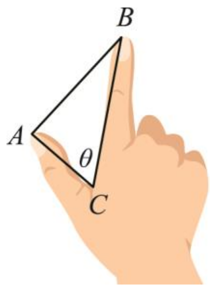
如下圖所示，左、右兩圖是將同一條三節棍做不同角度彎曲的情況：



已知左、右兩圖都是凸四邊形而且角度$\alpha \geq \alpha'$*及*$\beta \geq \beta'$*，試問：三節棍兩端的距離（虛線長度），何者比較長？*

這問題的解題關鍵在三角形的情形，而三角形的情形就是所謂的樞紐定理，或稱大角對大邊，小角對小邊定理：給兩個三角形，有相同的兩個邊，這兩個相同邊的夾角較大的三角形，其對應的第三個邊也較大。

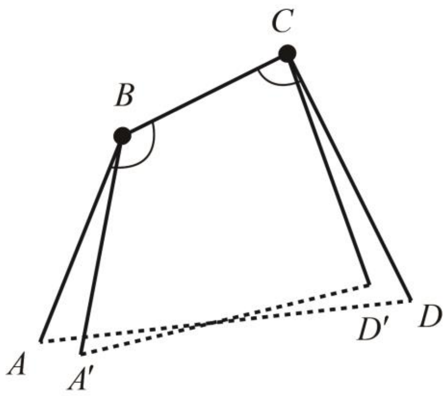
如果將你的大拇指與食指當成相同的兩個邊，那麼樞紐定理是在講一件大家都清楚的事實：「當虎口張角θ張得越大時，兩指尖的距離$\overline{AB}$就越大。」雖然這樣的比喻很容易瞭解，但是為了嚴密性，我們還是利用餘弦定理來證明樞紐定理：根據餘弦定理，兩指尖的距離$\overline{AB}$會滿足



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AC}\cdot\overline{BC}\cos\theta.$$

因為大拇指長度$\overline{AC}$與食指長度$\overline{BC}$是固定的，又虎口張角θ越大時，$\cos\theta$越小，所以虎口張角θ張得越大時，兩指尖的距離$\overline{AB}$就越大。

接下來利用樞紐定理來處理凸四邊形的情形，首先將左、右兩圖中的$\overline{BC}$與$\overline{B'C'}$疊在一起，如下圖所示：



① 比較三角形ABD與三角形$A'BD$：因為$\overline{AB}=\overline{A'B}$及$\overline{BD}=\overline{BD}$，所以根據樞紐定理得

$$\overline{AD}\geq\overline{A'D}.$$

② 比較三角形$A'CD$與三角形$A'CD'$：因為$\overline{A'C}=\overline{A'C}$及$\overline{CD}=\overline{CD'}$，所以根據樞紐定理得

$$\overline{A'D}\geq\overline{A'D'}.$$

綜合①與②得

$$\overline{AD} \geq \overline{A'D'}.$$

因此，張角比較大的三節棍兩端之距離也比較長。同樣的情形也可以類推到手臂張開的情況或凸多邊形的情形。但是，你是否注意到「凸」的條件在哪裡用到了。如果沒有注意到，那將會跟數學家柯西一樣，犯了一個不容易察覺的錯誤。